Die Maxwellgleichungen

„Es ist fast unmöglich, das Ausmaß der Leistung von Faraday und Maxwell zu überschätzen, die das Konzept des elektromagnetischen Felds in das menschliche Denken eingebracht haben.“ [1]

Im folgenden Kapitel werden die großartigen Werke von Michael Faraday (1791-1867) und James Clerk Maxwell (1831-1879) vorgestellt, die in den vier berühmten Maxwell’schen Gleichungen (kurz Maxwellgleichungen) zur Beschreibung des Elektromagnetismus resultierten. Die Maxwellgleichungen stellen ein „Juwel physikalischen Wissens“ dar, beschreiben sie doch eine in sich abgeschlossene Theorie der Physik, die bis heute Gültigkeit besitzt und Grundlage für die Elektronik und Elektrotechnik des 20. Und 21. Jahrhunderts darstellt.

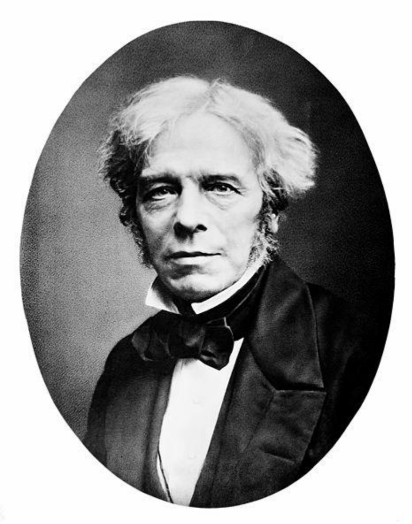

Abbildung 1: Michael Faraday[2]

Abbildung 2: James Clerk Maxwell[3]

Dabei lieferte der 40 Jahre ältere britische Naturforscher Michael Faraday, zu Beginn des 19. Jahrhunderts die experimentellen Grundlagen, die vom schottischen Physiker James Clerk Maxwell später aufgegriffen wurden und in einer umfassenden Theorie mathematisiert wurden. Beiden Physikern muss der gleiche Stellenwert eingeräumt werden, da es Faraday, aufgrund mangelnder mathematischer Fähigkeiten, zwar nicht gelang, die Ergebnisse seiner Experimente zu mathematisieren, Maxwell im Gegenzug aber ohne Faradays umfassende Experimente, nicht in der Lage gewesen wäre, eine vollständige Theorie des Elektromagnetismus zu entwickeln.

Faradays herausragendste wissenschaftliche Leistung, ist die Entdeckung der elektromagnetischen Induktion (siehe Kapitel: Induktionsgesetz nach Faraday). Diese Entdeckung stellt die Grundlage der heutigen Energieversorgung (abgesehen von Energieversorgung durch Photovoltaik-Anlagen; siehe Kapitel: Photoelektrischer Effekt) dar, da sie die Umwandlung von kinetischer in elektrische Energie ermöglicht. Im Gegensatz dazu bestand Maxwells größte wissenschaftliche Leistung in der Einführung der sog. Feldtheorien, also der Beschreibung von elektrischen und magnetischen Phänomenen mit Hilfe von elektrischen und magnetischen Feldern. Mit Hilfe dieser Theorie war es ihm möglich, die Existenz von elektromagnetischen Wellen vorherzusagen, die letztlich vom deutschen Physiker Heinrich Hertz experimentell nachgewiesen werden konnten (siehe Kapitel: Hertzscher Dipol).

[1] Nancy Forbes, Faraday, Maxwell, and the Electromagnetic Field: How Two Men Revolutionized Physics

[2] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Michael_Faraday._Photograph_by_Henry_Dixon_%26_Son_Ltd._Wellcome_M0005948.jpg

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen#/media/Datei:James_Clerk_Maxwell_big.jpg

Maxwells Theorie stellt somit die Grundlage sämtlicher heutiger drahtloser Kommunikation (Funk, Radio, W-Lan, etc.) dar.

Die für ein grundlegendes Verständnis der Maxwellgleichungen erforderlichen mathematischen Fähigkeiten überschreiten die im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe behandelten Themen. Die Maxwellgleichungen und deren Herleitungen werden deshalb im Folgenden zwar mathematisch korrekt notiert, ihre Bedeutung allerdings eher anschaulich als mathematisch erklärt.

Die vier Maxwellgleichungen lassen sich auf zwei Art und Weisen notieren, zum einen in Integralschreibweise und zum anderen mit Hilfe von sog. Differentialoperatoren:

1. Gaußsches Gesetz für elektrische Felder	
$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho$
2. Gaußsches Gesetz für magnetische Felder	
$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
3. Induktionsgesetz nach Faraday	
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4. Erweitertes Durchflutungsgesetz	
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \cdot \vec{j}$

Im Folgenden wird nun die Bedeutung der einzelnen Gleichungen und die jeweils zugrunde liegenden physikalischen Experimente näher betrachtet. Die Maxwellgleichungen werden in vier (bzw. genauer fünf 😜) wesentlichen Merksätzen formuliert.

<u>1. Entdeckung von Coulomb (1785)</u>

„Ruhende elektrische Ladungen sind umgeben von einem divergierenden elektrischen Feld“

Aus dem Kapitel Elektrostatik ist bekannt, dass im Raum um elektrische Ladungen auf andere Ladungen elektrische Kräfte wirken, die bei gleichnamigen Ladungen abstoßend und bei ungleichnamigen Ladungen anziehend wirken. Die Übertragung dieser Kräfte erfolgt durch ein elektrisches Feld, das sich im Raum um die Ladungen befindet. Die zugehörigen Feldlinien können mit Hilfe des Grieskörnchen-Experiments sichtbar gemacht werden.

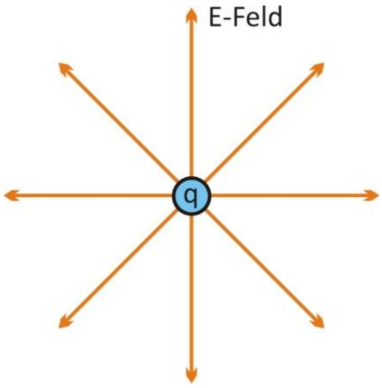

Abbildung 3: Feldlinien um eine Punktladung q

Abbildung 4: Grieskörnchen-Experiment

Etwas allgemeiner kann man formulieren, dass die Flächenladungsdichte σ, also die Menge der elektrischen Ladungen, die pro Fläche auf einem Körper gespeichert ist, proportional zur Feldstärke des elektrischen Feldes ist (siehe Kapitel: Flächenladungsdichte).

$$\sigma \sim |\vec{E}|$$

$$\frac{Q}{A} \sim |\vec{E}|$$

Als Proportionalitätskonstante erhält man die elektrische Feldkonstante ε_0.

$$\frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \cdot |\vec{E}|$$

Diese Gleichung kann gut auf das elektrische Feld einer Metallkugel angewendet werden. Auf einer Metallkugel mit der Oberfläche $A = 4\pi \cdot r^2$ sind die elektrischen Ladungen Q gleichmäßig verteilt. Die elektrischen Feldlinien zeigen senkrecht zur Kugeloberfläche radial nach außen und man erhält für die elektrische Feldstärke in Abhängigkeit vom Radius die folgende Gleichung:

$$\frac{Q}{4\pi \cdot r^2} = \varepsilon_0 \cdot |\vec{E}|$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Möchte man nun die Kraft berechnen, die im elektrischen Feld der Metallkugel auf eine Probeladung q wirkt, so erhält man das berühmte Coulombgesetz:

$$\begin{aligned} F_C &= |\vec{E}| \cdot q \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot q \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \end{aligned}$$

Die Lage wird jedoch komplexer, wenn man als Oberfläche des Körpers, auf dem die elektrischen Ladungen gespeichert sind, keine Kugelform, sondern einen beliebig geformten Körper annimmt. Die Proportionalität zwischen Flächenladungsdichte und elektrischer Feldstärke gilt in diesem Fall zunächst nur für infinitesimal kleine Ladungen dQ, die auf einer infinitesimal kleinen Fläche dA gespeichert sind.

$$\frac{dQ}{dA} = \varepsilon_0 \cdot |\vec{E}|$$

Umgestellt ergibt sich der Zusammenhang:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot dQ = |\vec{E}| \cdot dA$$

bzw.

$$|\vec{E}| \cdot dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot dQ$$

Neben der Flächenladungsdichte kann für den Körper, auf dem die Ladungen gespeichert sind, auch eine Volumenladungsdichte definiert werden, also die Menge an elektrischen Ladungen, die pro Volumen auf dem Körper gespeichert sind. Für diese Volumenladungsdichte ρ gilt analog zur Flächenladungsdichte:

$$\rho = \frac{Q}{V} \quad bzw. \rho = \frac{dQ}{dV}$$

Umgestellt ergibt sich für die Ladung dQ:

$$dQ = \rho \cdot dV$$

Dieser Zusammenhang kann nun in die Gleichung zur Bestimmung der elektrischen Feldstärke eingesetzt werden:

$$|\vec{E}| \cdot dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot dV$$

Wenn man nun die Feldstärke berechnen möchte, die im Raum um den beliebig geformten Körper herrscht, muss diese Gleichung auf beiden Seiten integriert werden. Dabei wird auf der linken Seite die elektrische Feldstärke über die komplette Fläche des Körpers integriert (also aufsummiert) und auf der rechten Seite die Ladungsdichte über das komplette Volumen des Körpers integriert.

$$\int_A |\vec{E}| \cdot dA = \int_V \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot dV$$

Die elektrische Feldkonstante kann aufgrund der Faktorregel vor das Integral geschrieben werden, so dass man schließlich die erste Maxwellgleichung erhält:

$$\int_A |\vec{E}| \cdot dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_V \rho \cdot dV$$

bzw. unter Berücksichtigung vektorieller Größen:

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$$

Diese Gleichung sagt nun aus, dass ein Volumen, in dem elektrische Ladungen mit einer bestimmten Ladungsdichte gespeichert sind (rechte Seite der Gleichung), umgeben ist von einem elektrischen Feld, dessen Feldlinien durch die Oberfläche des Körpers in den Raum um den Körper zeigen (linke Seite der Gleichung).

Einfacher ist hier die Schreibweise mit dem Differentialoperator „$Divergenz$“, kurz „div“:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho$$

Eine bestimmte Ladungsdichte ρ, also elektrische Ladungen in einem bestimmten Volumen, bewirkt ein divergierendes, also ein nach außen gerichtetes elektrisches Feld. Die entsprechenden Feldlinien laufen in diesem Fall ins Unendliche und bilden keine geschlossenen Linien, wie sie zum Beispiel von magnetischen Felder bekannt sind. Elektrische Felder, werden deshalb auch als Quellenfelder bezeichnet.

2. Entdeckung von Ampere (1820)

„Magnetische Feldlinien bilden immer geschlossene Linien“

Bereits sehr einfache Experimente mit Permanentmagneten zeigen, dass im Raum um Magnete Kräfte auf andere Magnete wirken, die bei ungleichnamigen Polen (Nord und Süd) anziehend und bei gleichnamigen Polen (Nord und Nord, bzw. Süd und Süd) abstoßend wirken. Die Übertragung dieser Kräfte erfolgt ähnlich wie bei elektrischen Ladungen durch Kraftfelder, in diesem Fall magnetische Felder. Diese können sehr einfach mit Hilfe von Eisenfeilspänen sichtbar gemacht werden. Bei magnetischen Felder zeigt sich jedoch eine Besonderheit. Im Gegensatz zu elektrischen Feldlinien, die zwar einen Anfang bei der entsprechenden elektrischen Ladung haben, aber entweder kein Ende besitzen und ins Unendliche laufen, oder bei einer anderen Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen enden können, bilden magnetische Feldlinien immer geschlossene Kurven ohne einen Anfang und ein Ende.

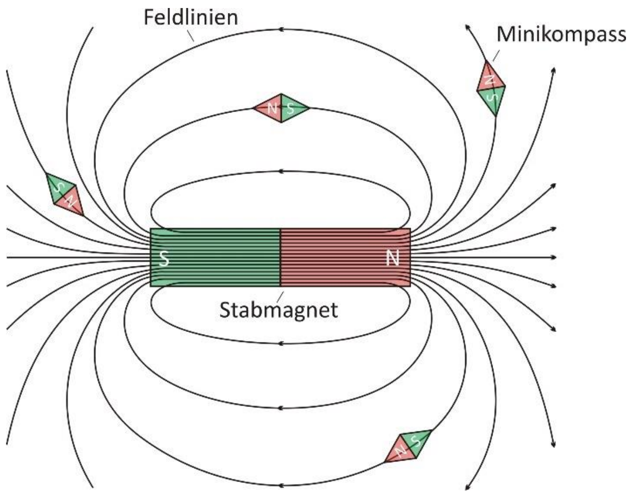

Abbildung 5: Feldlinienbild eines Stabmagneten

Auch die hier in der Abbildung vom Nordpol nach außen gezeichneten Feldlinien verlaufen außerhalb des Bildausschnittes wieder zurück zum Südpol. Magnetische Felder sind quellenfrei, haben also keinen Anfangs- und keinen Endpunkt.

Selbst wenn man versucht, den magnetischen Nord- vom magnetischen Südpol, zum Beispiel durch Zerbrechen eines Magneten, zu trennen, so gelingt dies nicht, da die einzelnen Teilstücke erneut jeder einen Nord- und einen Südpol besitzen. Es gibt also im Gegensatz zu elektrischen Ladungen keine magnetischen Monopole (einzelne Pole).

Die zugehörige zweite Maxwellgleichung ist in der Schreibweise mit Differentialoperatoren deshalb verblüffend einfach:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Diese Gleichung bedeutet, dass ein magnetisches Feld $\vec{B}$ niemals divergiert, also radial nach außen ins Unendliche verläuft. Die „Divergenz“ also das „Auseinanderstreben“ des magnetischen Feldes ist in jedem Fall gleich Null, weil alle magnetischen Feldlinien geschlossen sind.

Auch in integraler Schreibweise erhält man bei magnetischen Feldlinien den Wert Null, wenn man die magnetische Feldstärke über eine geschlossene Fläche um den Magneten aufsummiert bzw. integriert.

$$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Nimmt man als Beispiel die Oberfläche eines Stabmagneten, so kann experimentell beobachtet werden, dass Feldlinien aus dem Nordpol des Stabmagneten herauszeigen. Die gleiche „Menge“ an Feldlinien, die aus dem Nordpol herauszeigt, verläuft aber auf der anderen Seite des Magneten, am Südpol, wieder in den Magneten hinein und bildet in seinem Innern dann geschlossene Kurven. Jede Feldlinie, die aus der Oberfläche des Magneten herauszeigt, zeigt auf der anderen Seite des Magneten wieder in ihn hinein. Aufsummiert erhält man für die „Nettofeldstärke“ immer den Wert Null, solange man eine Fläche betrachtet, die den Magneten komplett umgibt.

3. Entdeckung von Faraday (1831)

„Zeitlich veränderliche Magnetfelder sind umgeben von elektrischen Wirbelfeldern“

In der Elektrizitätslehre sind zwei Möglichkeiten bekannt eine elektrische Spannung zu induzieren. Gemäß dem Induktionsgesetz nach Faraday, kann in einem Leiter eine Spannung induziert werden, wenn sich entweder die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche oder die Stärke des Magnetfelds ändert.

$$U_I = -n \cdot (\dot{A} \cdot B + A \cdot \dot{B})$$

Dies zeigt sich in den beiden Teilen des Faradayschen Induktionsgesetzes. In der Technik wird die erste Möglichkeit bei Generatoren zur Umwandlung von kinetischer in elektrische Energie verwendet. Im Generator wird eine Spule, der Rotor, in einem konstanten Magnetfeld eines Stators in Drehung versetzt. Dabei ändert sich bei jeder Umdrehung periodisch die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche des Rotors und es wird eine Wechselspannung induziert. Die zweite Möglichkeit, der Änderung des magnetischen Feldes, wird beispielsweise in Induktionskochfeldern verwendet. Dort wird, durch hochfrequente periodische Änderungen der magnetischen Feldstärke einer im Kochfeld verbauten Erregerspule, im Boden des Kochtopfs eine Wechselspannung induziert, die dort Wirbelströme hervorruft, welche wiederum den Kochtopf aufheizen.

Neben diesen bereits im Kapitel „Induktionsgesetz“ betrachteten Phänomenen beobachtete Faraday jedoch, dass sich, auch ohne das Vorhandensein eines zweiten Stromkreises oder einer zweiten Spule, im Raum um periodisch die Richtung ändernde magnetische Felder, kreisförmige elektrische Felder ausbilden, deren Feldlinien geschlossene Kurven bilden.

Dies ist bemerkenswert, da bereits seit Coulomb (siehe erste Maxwellgleichung) bekannt war, dass elektrische Felder sog. Quellenfelder sind, die sich divergent in den Raum um elektrische Ladungen ausbreiten. Bei den von Faraday entdeckten Feldern musste es sich also um eine andere Art von elektrischen Feldern handeln, die als elektrische Wirbelfelder bezeichnet werden.

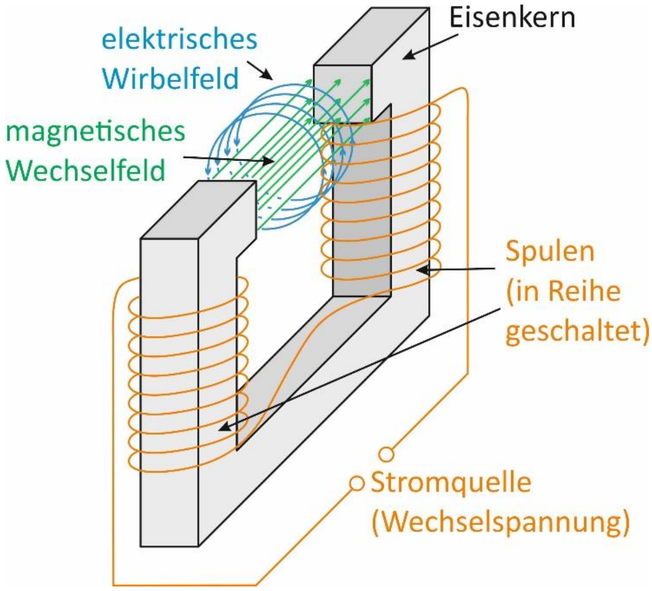

Abbildung 6: Elektrisches Wirbelfeld

Im Folgenden wird die dritte Maxwellgleichung zur Beschreibung dieser elektrischer Wirbelfelder ausgehend vom allgemeinen Induktionsgesetz hergeleitet.

$$U_I = -n \cdot \left(\dot{A} \cdot B + A \cdot \dot{B}\right)$$

Für ein sich änderndes magnetisches Feld kann der erste Teil des Induktionsgesetztes gleich Null gesetzt werden, da sich die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche nicht ändert ($\dot{A} = 0$). Genauso kann auf die Windungszahl n verzichtet werden, da in diesem Experiment keine Spannung in einer Spule induziert wird, sondern lediglich der Raum betrachtet wird, in dem sich das magnetische Feld ändert In der Abbildung ist dies der Raum zwischen den Polschuhen des Eisenkerns. Es verbleibt also:

$$U_I = -A \cdot \dot{B}$$

Betrachtet man nun in einem Gedankenexperiment zunächst nur „eine einzige“ magnetische Feldlinie, so ist die von dieser Feldlinie durchsetzte Fläche infinitesimal klein. Dementsprechend wird durch eine einzige Feldlinie auch nur eine infinitesimal kleine Spannung induziert.

$$dU_I = -dA \cdot \dot{B}$$

bzw.

$$dU_I = -\dot{B} \cdot dA$$

Da in Faradays Experiment keine Sekundärspule oder ähnliches mehr vorhanden ist, in dem die Induktionsspannung beispielsweise einen Induktionsstrom antreiben kann, ist mit Induktion hier lediglich die Entstehung des elektrischen Wirbelfeldes E gemeint.

Für die Spannung in homogenen elektrischen Feldern gilt der Zusammenhang $U = \left|\vec{E}\right| \cdot d$ bzw. $U = \left|\vec{E}\right| \cdot s$ (siehe Kapitel: homogene elektrische Felder). Diese Gleichung kann in Faradays Experiment nur für infinitesimal kleine Strecken ds angewendet werden, da es sich bei den beobachteten Feldlinien ja um kreisförmige Kurven handelt. Betrachtet man jedoch nur einen infinitesimal kleinen Teil der kreisförmigen Feldlinie, so kann in guter Näherung von einer geraden Teilstrecke ds ausgegangen werden. Die kreisförmige Feldlinie setzt sich also gewissermaßen aus unendlich vielen unendlich kleinen gerade Teilstücken zusammen. Mathematisch betrachtet kann man sich einen Kreis als Vieleck mit n-Ecken vorstellen, bei dem die Anzahl der Ecken gegen unendlich geht. Aus dieser Überlegung heraus folgt für die infinitesimal kleine Induktionsspannung:

$$dU_I = |\vec{E}| \cdot ds$$

Eingesetzt erhält man:

$$|\vec{E}| \cdot ds = -\dot{B} \cdot dA$$

Um nun das elektrische Feld für eine komplette kreisförmige Feldlinie zu berechnen, müssen sämtliche infinitesimal kleinen Teilstücke aufsummiert werden. Dies wird mathematisch durch ein sogenanntes Umlaufintegral oder Kurvenintegral erreicht, bei dem die elektrische Spannung entlang sämtlicher Teilstücke des Kreises aufsummiert wird. Im Gegensatz zur linken Seite, der Gleichung in der das Differential ds von der Strecke abhängt, ist die rechte Seite des Integrals abhängig vom Differential der Fläche dA. Hier wird nicht Umlaufintegral gebildet, sondern die von sämtlichen magnetischen Feldlinien durchsetzte Fläche aufsummiert, also ein Flächenintegral gebildet.

$$\oint |\vec{E}| \cdot ds = \int_A -\dot{B} \cdot dA$$

Auf der rechten Seite kann das Minuszeichen vor das Integral geschrieben werden. Die Änderung der magnetischen Feldstärke kann als Ableitung nach der Zeit $\frac{d}{dt}$ geschrieben werden.

$$\oint |\vec{E}| \cdot ds = -\int_A \frac{dB}{dt} \cdot dA == -\int_A \frac{d}{dt}(B) \cdot dA$$

Das Differential dA kann nun in die Klammer der Zeitableitung geschrieben werden, da es nicht von der Zeit abhängig ist und somit wie ein konstanter Faktor behandelt wird (Faktorregel). Eine genauere Begründung erfolgt durch Anwendung der Produktregel:

$$\frac{d}{dt}(B \cdot dA) = \frac{d}{dt}(B) \cdot dA + B \cdot \frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(B) \cdot dA + B \cdot 0 = \frac{d}{dt}(B) \cdot dA$$

Für das Integral erhält man also:

$$\oint |\vec{E}| \cdot ds = -\int_A \frac{d}{dt}(B \cdot dA)$$

Im letzten Schritt kann schließlich die Reihenfolge von Zeitableitung und Integral vertauscht werden, da es hier mathematisch keinen Unterschied macht, ob die Ableitung integriert wird, oder das Integral abgeleitet wird. Man erhält somit die dritte Maxwellgleichung.

$$\oint |\vec{E}| \cdot ds = -\frac{d}{dt} \int_A B \cdot dA$$

bzw. unter Berücksichtigung der vektoriellen Größen:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Diese Gleichung sagt nun aus, dass ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld (rechte Seite der Gleichung) ein kreisförmiges elektrisches Feld (linke Seite der Gleichung) hervorruft.

Auch hier ist die Schreibweise der Maxwellgleichung mit Hilfe von Differentialoperatoren einfacher:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Der Differentialoperator „$Rotation$“ kurz „rot“ bedeutet hier, dass es sich um ein Wirbelfeld handelt, dessen Feldlinien geschlossene, oft kreisförmige, Kurven besitzt. Diese Rotation wird, wie in der Integralschreibweise durch die Änderung des magnetischen Feldes bewirkt.

4. Entdeckung von Oersted (1820)

„Zeitlich veränderliche elektrische Felder sind umgeben von magnetischen Wirbelfeldern“

und

„Bewegte Ladungen sind umgeben von magnetischen Wirbelfeldern“

Die vierte Maxwellgleichung stellt eine Besonderheit gegenüber den ersten drei Maxwellgleichungen dar. Lassen die ersten drei Maxwellgleichungen jeweils nur eine einzige zentrale physikalische Aussage zu, so können aus der vierten Maxwellgleichung zwei physikalische Aussagen abgeleitet werden. Tatsächlich war es historisch so, dass zunächst nur die zweite physikalische Aussage, „Bewegte Ladungen sind umgegeben von magnetischen Wirbelfeldern“, vom dänischen Physiker Hans Christian Oersted experimentell beobachtet werden konnte.

Die erste Aussage, dass zeitlich veränderliche elektrische Felder auch magnetische Wirbelfelder hervorrufen können, wurde zunächst von Maxwell aufgrund von Symmetriegründen aus der dritten Maxwellgleichungen theoretisch vorhergesagt. So ist es physikalisch durchaus sinnvoll anzunehmen, dass die Aussage „zeitlich veränderliche magnetische Felder sind umgeben von elektrischen Wirbelfeldern“ (was Maxwell durch die Experimente von Faraday bereits bekannt war), auch umgekehrt gültig ist. Der experimentelle Nachweis dieser Überlegung gelang allerdings erst Heinrich Hertz im Jahr 1888 mit Hilfe von Funkeninduktoren, die für den Nachweis ausreichend hohe Frequenz besaßen.

Zur Herleitung der vierten Maxwellgleichung werden zunächst nur die experimentellen Überlegungen von Oerstedt herangezogen.

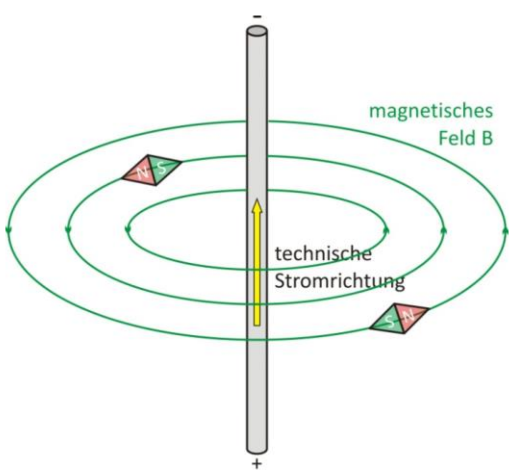

Abbildung 7: Magnetfeld eines geraden Leiters

Für die magnetische Feldstärke eines gerade Leiters erhält man die Gleichung: $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$. Es ist zu erkennen, dass die magnetische Feldstärke direkt proportional zur Stromstärke I also zu der Menge an bewegten Ladungen ist, die das magnetische Wirbelfeld hervorrufen.

Betrachtet man nun keinen geraden Leiter mehr, sondern einen Leiter, der beliebig gebogen sein kann und eine variable Dicke besitzt, so erhält man einen sog. Stromschlauch (siehe Abbildung).

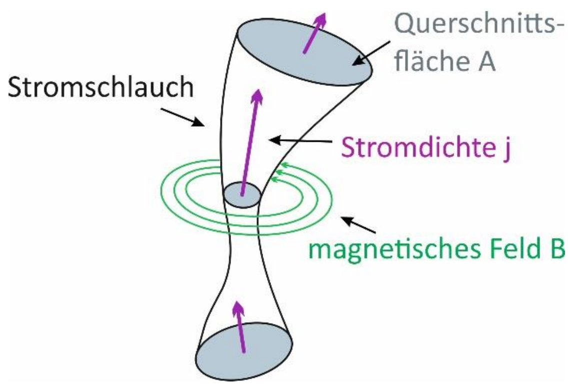

Abbildung 8: Stromschlauch

Bewegen sich elektrische Ladungen durch diesen Stromschlauch, so lässt sich die Stromstärke der elektrischen Ladungen mit Hilfe der sog. Stromdichte j bestimmen. Die Stromdichte gibt die Menge an elektrischen Ladungen an, die pro jeweiliger Querschnittsfläche durch den Stromschlauch fließen. An einer dünnen Stelle des Schlauchs ist die Stromdichte entsprechend hoch, da sehr viele elektrische Ladungen durch einen geringen Querschnitt fließen müssen. An weiteren Stellen des Schlauchs ist die Stromdichte entsprechend gering, weil sich der Stromfluss auf eine größere Fläche verteilen kann. Für die Stromdichte gilt folglich die Gleichung:

$$j = \frac{dI}{dA}$$

Die Gleichung der Stromdichte kann nun nach der Stromstärke umgestellt werden. Man erhält zunächst die infinitesimal kleine Stromstärke der Ladungen, die durch eine infinitesimal kleine Fläche strömen.

$$dI = j \cdot dA$$

Die Stromstärke sämtlicher Ladungen, die durch den Schlauch fließen, erhält man durch Aufsummieren, also durch Integrieren über die komplette Querschnittsfläche des Stromschlauchs:

$$\int dI = \int_A j \cdot dA$$

$$I = \int_A j \cdot dA$$

Analog zum geraden Leiter ist auch beim Stromschlauch die Stromstärke proportional zur magnetischen Feldstärke. Da es sich um Wirbelfelder handelt, kann die gesamte magnetische Feldstärke berechnet werden, indem man die Feldstärken über den kompletten Kreis integriert werden. Dies erreicht man erneut durch das Umlaufintegral:

$$\oint B \cdot ds$$

Dabei ist das Differential ds wieder ein infinitesimal kleiner Teil der geschlossenen Feldlinie, was im Falle eines geraden Leiters einem infinitesimal kleinen Teil des Kreisumfangs entsprechen würde.

Aufgrund der Proportionalität von Stromstärke und Magnetfeld erhält man den Zusammenhang:

$$\oint B \cdot ds \sim \int_A j \cdot dA$$

mit der Proportionalitätskonstanten μ_0

$$\oint B \cdot ds = \mu_0 \int_A j \cdot dA$$

Unter Berücksichtigung der vektoriellen Größen erhält man so den zweiten Teil der vierten Maxwell-Gleichung:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Diese Gleichung sagt also aus, dass ein von elektrischen Ladungen durchflossener „Stromschlauch“ mit der Stromdichte j (rechte Seite der Gleichung) von geschlossenen magnetischen Feldlinien (linke Seite der Gleichung) umgeben ist.

Zum Abschluss wird nun auch noch die erste Aussage der vierten Maxwellgleichung berücksichtigt, nach der zeitlich veränderliche elektrische Felder von magnetischen Wirbelfeldern umgeben sind. Die Herleitung erfolgt hier ähnlich zum Vorgehen Maxwells per Analogieschluss aus der dritten Maxwellgleichung, die bereits aus dem vorangegangenen Abschnitt bekannt ist:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Analog soll also gelten:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Beide Gleichungen sind mathematisch äquivalent und unterscheiden sich nur durch ihre Proportionalitätskonstanten. Auf eine mathematische Herleitung wird hier verzichtet.

Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass als Alternative zur hier verwendeten Analogie, mathematisch gezeigt werden kann, dass der obige Term benötigt wird, damit die sog. Kontinuitätsgleichung für die Ladung gilt. Diese Gleichung beschreibt letztlich die Erhaltung der elektrischen Ladung in der Elektrodynamik und ist neben der Energieerhaltung eine der wichtigsten Grundsätze der Physik.

Fasst man nun beide Teillösungen zusammen so erhält man schließlich die vollständige vierte Maxwellgleichung:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Diese besagt, dass es zwei Möglichkeiten zur Erzeugung von magnetischen Wirbelfeldern gibt. Zum einen können diese durch elektrische Wechselfelder hervorgerufen werden. Zum anderen können diese durch bewegte elektrische Ladungen hervorgerufen werden. Auch eine Kombination aus beiden Möglichkeiten ist physikalisch sinnvoll.

Auch die vierte Maxwellgleichung kann mit Hilfe von Differentialoperatoren geschrieben werden:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \cdot \vec{j}$$

Analog zur dritten Gleichung beschreibt hier der Rotationsoperator, dass es sich um ein magnetisches Wirbelfeld handelt, das durch die zeitliche Änderung von elektrischen Feldern oder durch bewegte elektrische Ladungen hervorgerufen werden kann.

5. Entdeckung von Hertz (1888)

Bei der Betrachtung der dritten und vierten Maxwellgleichungen fällt auf, dass diese mathematisch vollkommen symmetrisch zueinander sind, wenn kein Leitungsstrom (siehe vierte Maxwellgleichung) vorhanden ist.

„Elektrische Wechselfelder verursachen magnetische Wechselfelder und umgekehrt.“

Diese Symmetrie ist Grundlage für eine der wichtigsten physikalischen und technischen Errungenschaften der Menschheit, der Nutzung von elektromagnetischen Wellen. Bei elektromagnetischen Wellen breiten sich aneinander gekoppelte elektrische und magnetische Felder mit Lichtgeschwindigkeit c aus. Die Lichtgeschwindigkeit kann direkt mit dem Zusammenhang $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$, also den Proportionalitätskonstanten der vierten Maxwellgleichungen berechnet werden. Für die Ausbreitung dieser Wellen ist kein Äther oder ein anderes Medium erforderlich, da sich die elektrischen und magnetischen Felder selbst aufrechterhalten. Es ist äußerst bemerkenswert, dass Maxwell dies, ohne das Wissen über die Existenz von elektromagnetischen Wellen, theoretisch vorhersagen konnte. Erst Heinrich Hertz gelang es im Jahr 1888, die von Maxwell vorhergesagten elektromagnetischen Wellen experimentell nachzuweisen. Auch die Vermutung von Maxwell, dass das sichtbare Licht als elektromagnetische Welle aufgefasst werden kann, konnte wenige Jahre später experimentell von Hertz nachgewiesen werden.

Die aus den Maxwellgleichungen folgenden Gleichungen zur Beschreibung von elektromagnetischen Wellen, werden zu Ehren von Maxwell und Hertz „Maxwell-Hertz-Wellengleichungen“ genannt:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad und \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Sie beschreiben die zeitliche Ausbreitung von aneinander gekoppelten elektrischen und magnetischen Feldern in Form von senkrecht zueinander orientierten Transversalwellen.

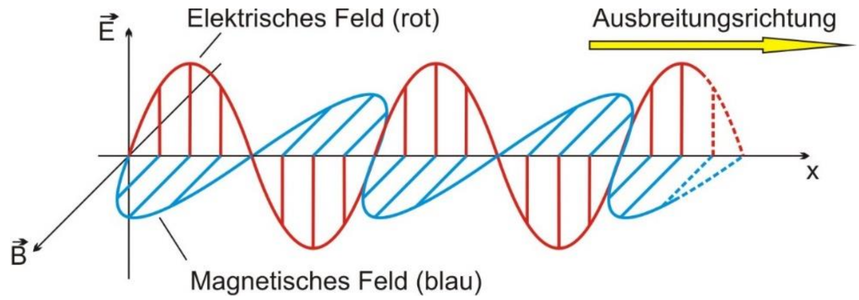

Abbildung 8: Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen

Abschlussbemerkung:

James Clerk Maxwell veröffentlichte im Laufe seines Lebens eine Vielzahl an Publikationen und Büchern. Einige Beispiele sind die Werke „Über physikalische Kraftlinien“ (1861), „Eine dynamische Theorie des elektromagnetischen Feldes“ (1865) und „Eine Abhandlung über Elektrizität und Magnetismus“ (1873). Interessanter Weise hat sich Maxwell in seinen Büchern nie genau auf vier elementare Gleichungen beschränkt, sondern weit über 20 verschiedene Gleichungen zur Beschreibung des Elektromagnetismus aufgestellt. Erst der englische Physiker und Mathematiker Oliver Heaviside (und unabhängig davon auch Heinrich Hertz), überarbeitete im Jahr 1884 Maxwells Gleichungen mit Hilfe des mathematischen Bereichs der Vektoranalysis und formulierte die heute bekannten vier Maxwellgleichungen, auf deren Grundlage auch Maxwells andere Gleichungen hergeleitet werden können.

Auch andere berühmte Wissenschaftler, wie der amerikanische Physiker Richard Feynman (1918-1988) würdigten Maxwells Arbeit als eine der größten Entdeckungen in der Geschichte der Menschheit, in dem er diese mit dem amerikanischen Bürgerkrieg verglich, der nach Feynmanns Prognose im langfristigen Vergleich mit den Maxwellgleichungen nur eine Randnotiz in der Geschichte der Menschheit darstellen wird:

"From a long view of the history of mankind, seen from, say, ten thousand years from now, there can be little doubt that the most significant event of the 19th century will be judged as Maxwell's discovery of the laws of electrodynamics. The American Civil War will pale into provincial insignificance in comparison with this important scientific event of the same decade."[4]

Danksagungen:

Mein Dank gilt meinem Kollegen Christoph Wiggenhagen und Prof. Dr. Björn Sothmann für die kritische Würdigung meiner Ausführungen und konstruktive Vorschläge zu meinem Artikel.

[4] Crease, Robert (2008) [https://books.google.com/books?id=IU04tZsVjXkC&lpg=PA133&dq=%22Civil%20War%20will%20pale%20into%20provincial%20insignificance%22&pg=PA133#v=onepage The Great Equations: Breakthroughs in Science from Pythagoras to Heisenberg], page 133