Das Zwillingsparadoxon

Bei der Beschäftigung mit der speziellen Relativitätstheorie und dabei insbesondere beim Umgang mit der Zeitdilatation, tritt häufig eine Verständnisschwierigkeit auf, die in der Literatur als Zwillingsparadoxon bekannt ist. In vielen Fachbüchern oder auf Internetseiten zum Thema Relativitätstheorie wird das Zwillingsparadoxon entweder auf sehr abstrakte und rein mathematische Weise thematisiert, so dass nur dem erfahrenen, physikalisch versierten Leser ein Einblick gewährt wird, oder auf einem derart einfachen Niveau diskutiert, dass dies kaum zu einem wirklichen Verständnis des Sachverhalts führen kann. Ziel der nachfolgenden Überlegungen ist es deshalb, einen Mittelweg zu gehen, um das Zwillingsparadoxon auf möglichst anschauliche, aber dennoch physikalisch präzise Weise zu erklären und das vermeintliche Paradoxon schließlich auszuräumen.

Vorüberlegung:

Gemäß Einsteins erstem Postulat gibt es kein bevorzugtes Inertialsystem. Das heißt, dass die Naturgesetze in jedem Bezugssystem dieselbe Form annehmen, solange diese keiner Beschleunigung unterliegen. So kann ein Astronaut in einem Raumschiff, das sich mit konstanter Geschwindigkeit durchs Weltall bewegt, ohne äußeren Bezugspunkt nicht durch ein Experiment oder eine Beobachtung feststellen, ob sich das Raumschiff bewegt oder ob es ruht. Der Bewegungszustand eines Raumschiffes kann nur im Bezug zu einem anderen Objekt angegeben werden. Dies könnte zum Beispiel die Erde oder ein zweites durch das Weltall fliegendes Raumschiff sein. Auch in diesem Fall ist es nur möglich eine Relativgeschwindigkeit v zwischen beiden Objekten anzugeben. Eine absolute Geschwindigkeitsangabe ist für den Astronauten nicht möglich. Solange sich die Geschwindigkeit nicht ändert, lässt sich nicht eindeutig sagen, welches Objekt sich bewegt und welches Objekt sich in Ruhe befindet. „Bewegung“ und „Ruhe“ hängen vom Standpunkt des Beobachters ab, wie das nachfolgende Beispiel verdeutlichen soll:

Zwei Raumschiffe A und B bewegen sich im freien Weltall mit konstanter Geschwindigkeit v (Relativgeschwindigkeit) aufeinander zu. Aus der Perspektive eines Beobachters im Raumschiff B, der sich relativ zu seinem Raumschiff in Ruhe befindet, bewegt sich das Raumschiff A mit der Geschwindigkeit v auf ihn zu. Für einen Beobachter im Raumschiff A stellt sich der Sachverhalt jedoch genau andersherum dar.

Dieser befindet sich relativ zum Raumschiff A in Ruhe und beobachtet, dass sich das Raumschiff B mit der Geschwindigkeit v auf ihn zu bewegt. Welches Raumschiff sich bewegt und welches sich in Ruhe befindet hängt also ausschließlich von der Position und vom Bewegungszustand des Beobachters ab. Beide Betrachtungsweisen sind vollkommen äquivalent zueinander und gleich richtig.

Interessant wird es nun, wenn sich die Relativgeschwindigkeit v zwischen den beiden Raumschiffen der Lichtgeschwindigkeit nähert. In diesem Fall treten relativistische Effekte wie die Zeitdilatation auf. Aus der

Perspektive von B bewegt sich A mit relativistischer Geschwindigkeit und unterliegt deshalb der Zeitdilatation. Das heißt, dass die Zeit aus Sicht von B in A langsamer verläuft als in B.

Aus der Perspektive von A bewegt sich wiederum B mit relativistischer Geschwindigkeit und unterliegt deshalb der Zeitdilatation. Aus der Sicht von A verläuft deshalb die Zeit in B langsamer als in A.

Dieser Sachverhalt stellt keinen Widerspruch dar, da die Zeit in verschiedenen Inertialsystemen unterschiedlich wahrgenommen wird. Er ist ein Beispiel dafür, dass die Vorstellung der Zeit als absolute Größe, wie sie aus der klassischen Mechanik bekannt ist, im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie nicht beibehalten werden kann.

<u>Das Zwillingsparadoxon:</u>

Ein weiteres Beispiel für die Zeitdilatation ist das berühmte Zwillingsparadoxon: Die beiden Brüder Albert (A) und Berthold (B) sind Zwillinge. Während Berthold mit einem neu entwickelten Raumschiff die Weiten des Weltalls erkunden will, verbleibt Albert auf der Erde und unterstützt seinen Zwillingsbruder auf seiner Reise vom Kontrollzentrum aus. Am 30. Geburtstag von Albert und Berthold startet das Raumschiff, das sich aufgrund eines revolutionären neuen Antriebs mit 80% der Lichtgeschwindigkeit bewegen kann, in Richtung des neun Lichtjahre entfernten Sterns Sirius. Nach einem kurzen zu vernachlässigbaren Aufenthalt im Planetensystem von Sirius kehrt Berthold mit dem Raumschiff zurück zur Erde. Zurück auf der Erde stellt Albert fest, dass sein Bruder Berthold aufgrund der hohen Reisegeschwindigkeit und der damit verbundenen Zeitdilatation weniger gealtert ist als er selbst. Dies zeigt die nachfolgende Rechnung.

Das Raumschiff bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v = 0{,}8c$. Vernachlässigt man die Beschleunigungsphasen auf der Reise lässt sich hiermit die Reisezeit für Hin- und Rückflug berechnen.

$$s(t) = v \cdot t$$

Für den Hinflug gilt:

$$t_H = \frac{s(t)}{v} = \frac{9Lj}{0{,}8 \cdot c} = \frac{9 \cdot 1a \cdot c}{0{,}8 \cdot c} = 11{,}25a$$

Dabei ist anzumerken, dass die Entfernung von einem Lichtjahr ($1Lj$) berechnet werden kann, indem man die Lichtgeschwindigkeit c mit einer Zeit von einem Jahr ($1a$) multipliziert. Eine Umrechnung in SI-Einheiten ist nicht nötig, da die Lichtgeschwindigkeit in der Rechnung gekürzt werden kann.

Für den Rückflug gilt ebenso:

$$t_R = \frac{s(t)}{v} = \frac{9Lj}{0{,}8 \cdot c} = \frac{9 \cdot 1a \cdot c}{0{,}8 \cdot c} = 11{,}25a$$

Für Albert im Kontrollzentrum hat die Reise von Berthold somit 22,5 Jahre gedauert:

$$t_{Ges} = t_H + t_R = 22{,}5a$$

Für Berthold, der sich während der Reise kontinuierlich mit der relativistischen Geschwindigkeit von $0{,}8c$ bewegt hat, ist die Reisedauer jedoch geringer, da er auf seiner Reise der Zeitdilatation unterliegt.

$$t'_H = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\cdot t_H = \sqrt{1-\left(\frac{0{,}8c}{c}\right)^2}\cdot t_H = \sqrt{1-(0{,}8)^2}\cdot t_H = 0{,}6\cdot t_H$$

$$\Rightarrow t'_H = 0{,}6\cdot 11{,}25a = 6{,}75a$$

Analog ergibt sich für den Rückflug:

$$\Rightarrow t'_R = 0{,}6\cdot 11{,}25a = 6{,}75a$$

Für Berthold hat aufgrund der Zeitdilatation somit die Reise insgesamt nur 13,5 Jahre gedauert:

$$t'_{Ges} = t'_H + t'_R = 13{,}5a$$

Am Ende der Reise ist Albert im Kontrollzentrum deshalb bereits 52,5 Jahre alt, wohingegen Berthold erst 43,5 Jahre alt ist. Aus dem Raumflug resultiert somit ein Altersunterschied von 9 Jahren. Entgegen häufiger Annahmen stellt dieser, auf der Zeitdilatation basierende Zeitunterschied, nicht das Zwillingsparadoxon dar.

Das eigentliche Zwillingsparadoxon ergibt sich aus der folgenden Überlegung:

Aus der Perspektive eines Beobachters auf der Erde bewegt sich das Raumschiff von der Erde weg und kehrt dann nach einiger Zeit wieder auf die Erde zurück. Das Raumschiff unterliegt somit der Zeitdilatation, sodass nach der Rückkehr auf die Erde auf dem Raumschiff weniger Zeit vergangen ist als auf der ruhenden Erde.

Aus der Perspektive eines Beobachters auf dem Raumschiff bewegt sich die Erde vom Raumschiff weg und kehrt dann nach einiger Zeit wieder zum Raumschiff zurück. Die Erde müsste deshalb der Zeitdilatation unterliegen, sodass entgegen der obigen Annahme auf der Erde weniger Zeit vergangen ist, als auf dem vermeintlich ruhenden Raumschiff.

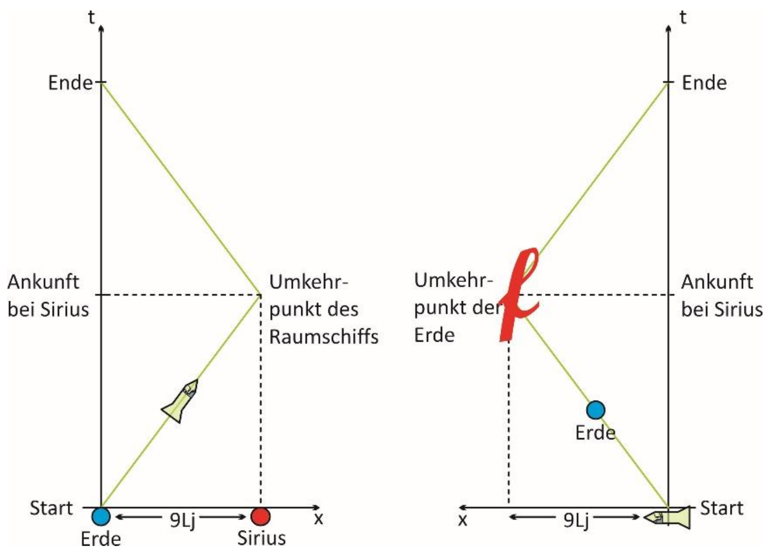
Da sich beide Überlegungen widersprechen, spricht man in diesem Fall von einem Paradoxon.

Auflösung des Zwillingsparadoxons:

Der Unterschied zur Situation der beiden sich aufeinander zubewegenden Raumschiffe aus der Vorüberlegung besteht beim Zwillingsparadoxon darin, dass die Bewegung des Raumschiffs beim Zwillingsparadoxon nicht während des ganzen Fluges mit konstanter Geschwindigkeit abläuft, sondern dass das Raumschiff insgesamt zwei Beschleunigungsphasen und zwei Bremsphasen (negative Beschleunigung) durchläuft. So werden die Passagiere an Bord des Raumschiffs durch die starke Beschleunigung beim Start in ihre Sitze gepresst. Auch ein Beschleunigungssensor, wie er in jedem modernen Smartphone verbaut ist, würde beim Start eine Beschleunigung registrieren. Bei der Ankunft im Siriussystem muss das Raumschiff stark abbremsen, sodass die Passagiere in die Anschnallgurte gedrückt werden. Auch hier würde ein Beschleunigungssensor eine negative Beschleunigung anzeigen. Gleiches erfolgt beim Rückflug, also eine Beschleunigung beim Abflug aus dem Siriussystem und ein Bremsvorgang bei der Ankunft auf der Erde. Es kann also zusammengefasst werden, dass die Passagiere eines Raumschiffs gemäß dem ersten Einstein'schen Postulat zwar nicht feststellen können, ob sie sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen oder nicht, jedoch sowohl Beschleunigungs- als auch Bremsphasen aufgrund ihrer eigenen Massenträgheit (1. Newtonsches Axiom) sehr wohl beobachten und auch messen können.

Die entscheidende Erkenntnis, die das Zwillingsparadoxon schließlich auflöst, besteht darin, dass die umgekehrte Sichtweise einer ruhenden Rakete, von der sich die aus Erde wegbewegt, also die Erde ins Weltall beschleunigt wird, schlicht und einfach falsch ist. Würde sich die Erde vom Raumschiff entfernen und nicht umgekehrt, so würden die Passagiere im Raumschiff keine Beschleunigung bemerken und weder in die Sitze gepresst noch in die Gurte gedrückt werden. Umgekehrt würden alle Bewohner auf der Erde eine Beschleunigung erfahren, wenn sich die Erde von der Rakete entfernt. Auch im Umkehrpunkt, an dem die Erde die größte Entfernung zum Raumschiff besitzt, müssten alle Erdbewohner zuerst eine Abbremsvorgang und danach wieder eine Beschleunigung in entgegengesetzte Richtung feststellen. Da dies jedoch nicht der Fall ist, kann geschlossen werden, dass es tatsächlich ausschließlich die Rakete ist, die beschleunigt und abbremst und nicht die Erde. Eine einfache äquivalente Umkehrung der Beobachtungsperspektiven, ohne Berücksichtigung der Änderung der Bewegungsrichtung des Raumschiffs, ist somit im Fall des Zwillingsparadoxons nicht zulässig.

Die nachfolgende Abbildung verdeutlicht den Verlauf der Ereignisse in einem einfachen Minkowski-Diagramm und verdeutlicht, dass eine Perspektivwechsel nicht zulässig ist.



Im Umkehrpunkt der Rakete im Siriussystem wechselt das Raumschiff die Bewegungsrichtung, das heißt, es muss zunächst Abbremsen und dann in Richtung Erde beschleunigen. Dabei findet ein Wechsel des Inertialsystems statt, da ein Inertialsystem nur bei konstanter Geschwindigkeit vorliegt. Auch wenn sich nur das Vorzeichen der Geschwindigkeit umgekehrt hat, führt dies dazu, dass das Raumschiff in ein anderes Inertialsystem wechselt. Im umgekehrten Fall findet für die Erde ein derartiger Wechsel des Inertialsystems während des gesamten Vorgangs nicht statt, da die Erde zu keinem Zeitpunkt beschleunigt bzw. abgebremst wird. Aus diesem Grund beschreibt nur das linke Minkowski-Diagramm die Vorgänge richtig. Es ist nicht umkehrbar. Ergänzend muss an dieser Stelle angemerkt werden, dass dies nicht bedeutet, dass für einen im Raumschiff ruhenden Beobachter die Vorgänge auf der Erde nicht der Zeitdilatation unterliegen. Jedoch muss der Beobachter im Raumschiff zusätzlich zur auf der Erde vorliegenden Zeitdilatation noch seine eigene Bewegung und insbesondere die Richtungsänderung im Siriussystem berücksichtigen, um zu den richtigen Schlussfolgerungen zu gelangen.

Im Folgenden soll deshalb nun überlegt werden, wie auch Berthold, also der im Raumschiff befindliche Zwilling, feststellen kann, dass er gegenüber Albert im Kontrollzentrum langsamer altert. Dies ist für Berthold nur möglich, wenn er während des gesamten Fluges mit Albert in Kontakt bleibt bzw. von Albert kontinuierlich über die auf der Erde vergangene Zeit informiert wird. Hierzu installiert Albert im Kontrollzentrum auf der Erde ein Blitzlicht, das in einem Abstand von genau einer Sekunde (Erdzeit) einen Lichtblitz in Richtung des Raumschiffs von Berthold aussendet. Dies könnte zum Beispiel ein sehr leistungsstarker Laser sein, der mit einer Frequenz von genau $1Hz$ Lichtpulse aussendet. An Bord des Raumschiffs wurde von Berthold ein Detektor installiert, der diese Lichtblitze empfängt und den zeitlichen Abstand zwischen den Lichtblitzen exakt vermisst.

Aufgrund der Zeitdilatation, der die Erdbewohner aus der Perspektive von Berthold unterliegen, berechnet Berthold, dass die Blitze nicht im Abstand von $1s$ im Detektor eintreffen sollten, sondern in einem Abstand von ca. $1{,}667s$:

$$t_{Albert} = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot t_{Berthold}$$

$$\Rightarrow t_{Berthold} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot t_{Albert} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}8c}{c}\right)^2}} \cdot t_{Albert} = \frac{1}{0{,}6} \cdot t_{Albert}$$

$$\Rightarrow t_{Berthold} = \frac{1}{0{,}6} \cdot 1s = \frac{5}{3}s \approx 1{,}667s$$

Gleiches gilt sowohl für den Hinflug, als auch für den Rückflug, da sich Berthold mit dem Detektor im Raumschiff relativ zur Erde in Ruhe befindet. Die anhand der Zeitdilatation berechnete Zeit von ca. $1{,}667s$ zwischen zwei Blitzen stimmt dennoch <u>nicht</u> mit den experimentell von Berthold gemessenen Werten überein. Neben der Zeitdilatation muss noch berücksichtig werden, dass sich Berthold zwischen zwei Lichtblitzen auf dem Hinweg ins Siriussystem von der Erde entfernt. Die Lichtblitze erreichen ihn deshalb mit einer zusätzlichen Verzögerung. Die Strecke die Berthold zwischen zwei Lichtblitzen zurücklegt beträgt:

$$s(t_{Berthold}) = v \cdot t_{Berthold} = 0{,}8c \cdot t_{Berthold} = 0{,}8c \cdot \frac{5}{3}s = \frac{4}{5}c \cdot \frac{5}{3}s = \frac{4}{3}\,c \cdot s$$

$$= \frac{4}{3}\,Lichtsekunden \approx 1{,}333 Lichtsekunden$$

Erneut kann an dieser Stelle auf eine Umrechnung in SI-Einheiten verzichtet werden, da zur Überwindung einer Strecke von 1,333 Lichtsekunden das Licht genau 1,333 Sekunden benötigt. Zusammengefasst bedeutet dies, dass die Zeit, die Berthold zwischen zwei Lichtblitzen im Vergleich zu Albert auf der Erde misst, zum einen durch die Zeitdilatation und zum anderen durch die Strecke, um die sich Berthold zwischen zwei Lichtblitzen von der Erde entfernt, verlängert wird. Beide Werte müssen deshalb addiert werden, um die tatsächliche Zeit, mit der die Lichtblitze an Bord des Raumschiffs gemessen werden zu bestimmen:

$$\Rightarrow t_{Blitz\,(Hinflug)} = \frac{5}{3}s + \frac{4}{3}s = 3s$$

Berthold erscheinen deshalb alle Vorgänge auf der Erde <u>dreimal langsamer</u> als auf seinem Raumschiff. Er berechnet deshalb, dass auf der Erde während seines Hinflugs zum Sirius, der für ihn genau 6,75 Jahre dauert, nur eine Zeit von

$$\frac{6{,}75a}{3} = 2{,}25a$$

vergangen ist.

Auf dem Rückweg eilt Berthold den Lichtblitzen entgegen, so dass ihn die Lichtblitze nun wesentlich schneller erreichen. Die Wirkung der Zeitdilatation und der Bewegung in Gegenrichtung zu den Lichtblitzen müssen deshalb voneinander subtrahiert werden:

$$\Rightarrow t_{Blitz\ (Rückflug)} = \frac{5}{3}s - \frac{4}{3}s = \frac{1}{3}s$$

Berthold erscheinen somit alle Vorgänge auf der Erde trotz Zeitdilatation <u>dreimal so schnell</u> wie die Vorgänge an Bord. Er berechnet deshalb, dass auf der Erde, während seines Rückflugs vom Sirius, der für ihn genau wie der Hinflug 6,75 Jahre dauert, eine Zeit von

$$6{,}75a \cdot 3 = 20{,}25a$$

vergangen ist.

Fasst man nun die Ergebnisse aus der Sicht von Berthold zusammen, so ergibt sich für ihn selbst eine Reisedauer von

$$t_{Berthold\ (Gesamt)} = 6{,}75a + 6{,}75a = 13{,}5a$$

wohingegen aus der Sicht von Berthold auf der Erde insgesamt

$$t_{Albert\ (Gesamt)} = 2{,}25a + 20{,}25a = 22{,}5a$$

vergangen sind.

Zusammengefasst stimmen also die Zeiten die Berthold für seine Raumschiff und für die Erde bestimmt genau mit den Zeiten überein, die Albert im Kontrollzentrum für das Raumschiff und die Erde bestimmt. Es wird deutlich, dass der Altersunterschied zwischen beiden Zwillingen aus beiden Perspektiven genau neun Jahre beträgt und in beiden Fällen Albert derjenige ist, der mehr gealtert ist als sein Zwillingsbruder. Das vermeintliche Zwillingsparadoxon konnte somit aufgelöst werden.

<u>Abschließende Bemerkung:</u>

Neben der theoretischen Herleitung, die zwangsläufig zu einer Lösung des vermeintlichen Zwillingsparadoxons führt, wurde der auftretende Zeitunterschied zwischen einem ruhenden und einem bewegten Beobachter im Jahre 1971 experimentell im sog. Hafele-Keating-Experiment nachgewiesen. Hierzu wurden zwei sehr genaue Caesium-Atomuhren zunächst synchronisiert und daraufhin voneinander getrennt. Eine Atomuhr wurde in einem Flugzeug mehrere Stunden bewegt, wohingegen die andere Uhr in Ruhe am Flughafen zurückblieb. Nach der Rückkehr des Flugzeuges zeigten die Uhren tatsächlich eine Zeitdifferenz in der Größenordnung von einigen Nanosekunden, so dass die Zeitdilatation nun auch experimentell belegt und das Zwillingsparadoxon widerlegt werden konnte (Es ist dabei anzumerken, dass im Hafele-Keating-Experiment auch Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie, wie die gravitative Zeitdilatation die Messdaten beeinflussen).